Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Torsdagen den 13 mars 2014 klockan 08.30-11.30 i M.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 070-3744377, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

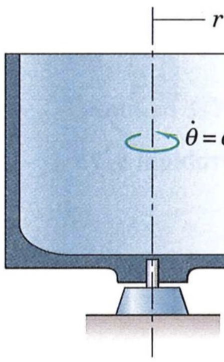
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

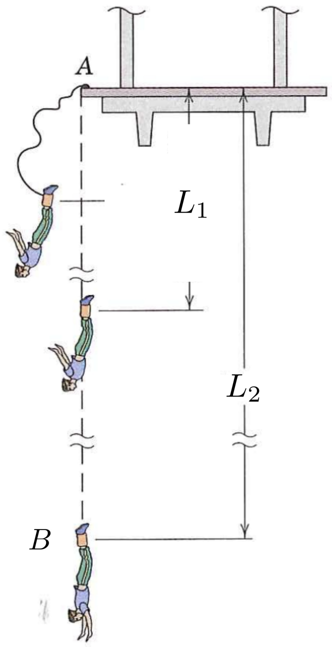
Rättningsgranskning: Måndag 31/3 2014 kl.12-13 i sal FL61.

Uppgifter

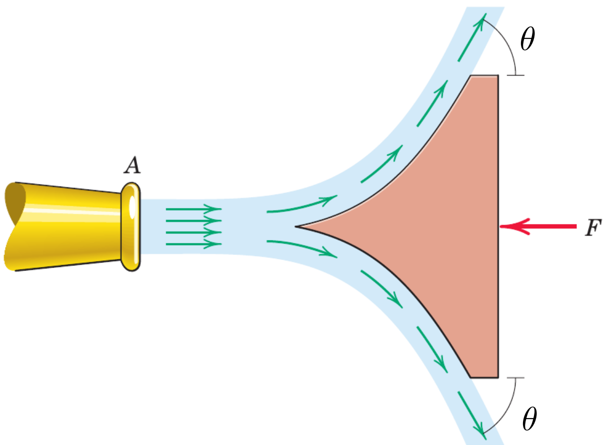
1. Ett litet objekt A befinner sig i en roterande cylindrisk behållare, vilken roterar med konstant vinkelhastighet, och hålls mot kanten p g a att cylindern roterar. Om den statiska friktionskoefficienten är μ_s, bestäm ett uttryck för den minimala rotationshastigheten $\dot{\theta} = \omega$ som gör att objektet inte glider ner för cylinderns innervägg. Radien r är given och kan användas i svaret.



2. En bungee-hoppare med massan m hoppar från en bro vid punkten A där bungee-linan är fäst. Hen faller längden L_1 innan bungee-linan börjar dras ut (dvs bungee-linans längd när man inte drar i den är L_1) och når som mest till längden L_2 under bron innan hen studsar upp. Betrakta bungee-linan som en fjäder med fjäderkonstanten k. Beräkna fjäderkonstanten k samt hopparens maximala hastighet och var denna inträffar. Försumma alla energiförluster t ex i bungee-linan, p g a luftmotstånd etc. Personen kan betraktas som punktformig.



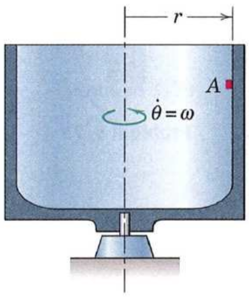
3. Vatten med densiteten ρ sprutar ut från en slang med hastigheten v (m/s) och med ett flöde c (m^3/s). Strålen delas i två delar av ett hinder, enligt figuren, varvid båda av vattenflödets två delar ändrar riktning med vinkeln θ. Beräkna kraften F som krävs för att hindret inte ska röra sig. Observera att vattenflödet sker i ett horisontellt plan, dvs vattnet rör sig inte i höjdled.



Lycka till!

Lösningsförslag till tenta
FFM516 13/3 - 2014

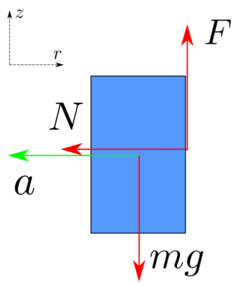
1. Ett litet objekt A befinner sig i en roterande cylindrisk behållare, vilken roterar med konstant vinkelhastighet, och hålls mot kanten p g a att cylindern roterar. Om den statiska friktionskoefficienten är μ_s, bestäm ett uttryck för den minimala rotationshastigheten $\dot{\theta} = \omega$ som gör att objektet inte glider ner för cylinderns innervägg. Radien r är given och kan användas i svaret.



Lösning

Eftersom objektet inte glider på väggen så rör det sig i en cirkelbana med radien r och vinkelhastigheten ω.

Frilägg objektet:



I z- och r-led ger detta ekvationerna

$$\begin{aligned} F - mg &= 0 \\ -N &= -mr\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

Precis innan objektet börjar glida är friktionskraften maximal så att $F = \mu_s N$, dvs ekvationssystemet ovan blir

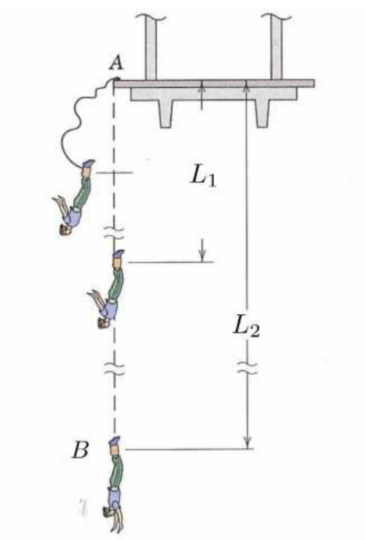
$$\begin{aligned} \mu_s N - mg &= 0 \\ -N &= -mr\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Multiplicera den andra ekvationen med μ_s och addera till första ger

$$\begin{aligned} -mg &= -\mu_s mr\dot{\theta}^2 \\ &\Leftrightarrow \\ |\dot{\theta}| &= \sqrt{\frac{g}{r\mu_s}} \end{aligned}$$

$$\left([\dot{\theta}] = \sqrt{\frac{\frac{m}{s^2}}{m}} = \frac{1}{s} \right)$$

2. En bungee-hoppare med massan m hoppar från en bro vid punkten A där bungee-linan är fäst. Hen faller längden L_1 innan bungee-linan börjar dras ut (dvs bungee-linans längd när man inte drar i den är L_1) och når som mest till längden L_2 under bron innan hen studsar upp. Betrakta bungee-linan som en fjäder med fjäderkonstanten k. Beräkna fjäderkonstanten k samt hopparens maximala hastighet och var denna inträffar. Försumma alla energiförluster t ex i bungee-linan, p g a luftmotstånd etc. Personen kan betraktas som punktformig.



Lösning

När bungee-hopparen står på plattformen är rörelseenergin noll. Vid B har hen förflyttat sig en total sträcka L_2 vilket ger en förändring i potentiell energi av $\Delta V_{mg} = -mgL_2$.

Bungee-linan har nu sträckts en längd $L_2 - L_1$ från sitt jämviktläge och ger därför en förändring av potentiell energi $\Delta V_{\text{bungee}} = \frac{1}{2}k(L_2 - L_1)^2$.

När hopparen når B är farten momentant noll vilket ger att skillnaden i rörelseenergi är noll. Eftersom inga andra krafter verkar så har vi ekvationen

$$\Delta E = \Delta V_{\text{bungee}} + \Delta V_{mg} = 0$$

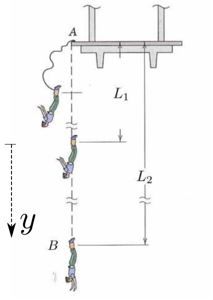
$$\frac{1}{2}k(L_2 - L_1)^2 - mgL_2 = 0$$

vilket vi kan lösa för k:

$$k = \frac{2mgL_2}{(L_2 - L_1)^2}$$

$$\left([k] = \frac{\text{kg}\frac{m}{s^2}\,m}{m^2} = \frac{\text{kraft}}{\text{meter}} \right)$$

Låt y beteckna hopparens position relativt linans jämviktsläge och v hens fart.



För $y < (L_2 - L_1)$ kommer farten vara nollskilld och rörelseenergin ges av $T = \frac{mv^2}{2}$. Energiprincipen ger nu

$$\begin{aligned}
\Delta E = \Delta V_{mg} + \Delta V_{\text{bungee}} + \Delta T &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
-mg(L_1 + y) + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{mv^2}{2} &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
v(y) &= \sqrt{2g(L_1 + y) - \frac{2gL_2}{(L_2 - L_1)^2}y^2}
\end{aligned}$$

För att hitta maximum av $v(y)$ deriverar vi en gång

$$\dot{v} = \frac{g - 2\frac{gL_2}{(L_2 - L_1)^2}y}{\sqrt{2g(L_1 + y) - \frac{2gL_2}{(L_2 - L_1)^2}y^2}}$$

Extrempunkten är därför

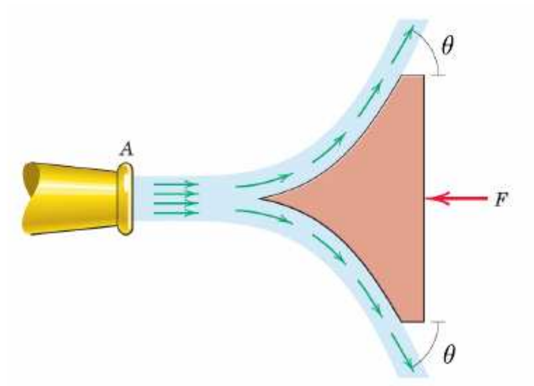
$$\begin{aligned}
\dot{v} &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
y_{\max} &= \frac{1}{2}\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}
\end{aligned}$$

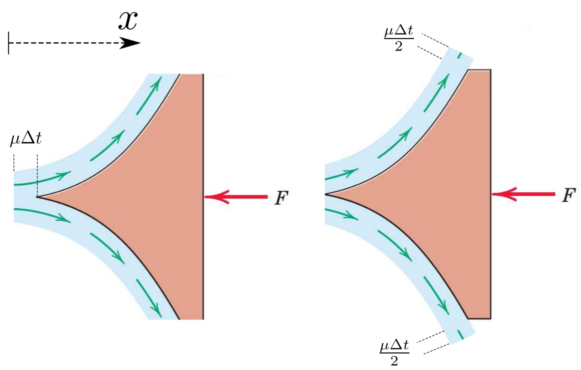
Insättning i $v(y)$ ger sedan

$$\begin{aligned}
v_{\max} = v(y_{\max}) &= \sqrt{2g\left(L_1 + \frac{1}{2}\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}\right) - \frac{2gL_2}{(L_2 - L_1)^2}\frac{1}{4}\left(\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}\right)^2} \\
&= \sqrt{2g\left(L_1 + \frac{1}{2}\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}\right) - \frac{1}{2}g\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}} \\
&= \sqrt{2gL_1 + \frac{1}{2}g\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}} \\
&= (L_1 + L_2)\sqrt{\frac{g}{2L_2}}
\end{aligned}$$

$$\left([v_{\max}] = m\sqrt{\frac{\frac{m}{s^2}}{m}} = \frac{m}{s}\right)$$

3. Vatten med densiteten ρ sprutar ut från en slang med hastigheten v (m/s) och med ett flöde c (m^3/s). Strålen delas i två delar av ett hinder, enligt figuren, varvid båda av vattenflödets två delar ändrar riktning med vinkeln θ. Beräkna kraften F som krävs för att hindret inte ska röra sig. Observera att vattenflödet sker i ett horisontellt plan, dvs vattnet rör sig inte i höjdled.





I den vänstra figuren visas en bit av flödet vid tiden t och sedan lite senare vid tiden $t+\Delta t$ till höger.

Totala massflödet vatten ges av $\mu = c\rho$. Frilägg hindret och vattnet på hindret tillsammans med en liten bit vatten som är på väg in från vänster under tiden Δt. Massan hos den lilla vattenbiten ges av massflödet gånger tiden, dvs $\mu\Delta t = c\rho\Delta t$.

Förändringen i rörelsemängd under tiden Δt ges av skillnaden av rörelsemängden för den lilla biten på väg in vid t och de två små bitarna på väg ut vid $t + \Delta t$, resten av vattenflödet har samma rörelsemängd vid båda tidpunkterna eftersom det är ett stationärt flöde. Eftersom vi är intresserade av kraften som är horisontell så tittar vi bara på skillnaden i x- komponenten för rörelsemängden.

$$\begin{aligned} G_x(t) &= (c\rho\Delta t)v \\ G_x(t+\Delta t) &= 2\left(\frac{c\rho\Delta t}{2}\right)v\cos(\theta) \end{aligned}$$

Den enda externa kraften är F så den totala impulsen är $F\Delta t$ vilket är lika med förändringen av rörelsemängden:

$$\begin{aligned} -F &= \frac{\Delta G_x}{\Delta t} = (\cos(\theta) - 1)vc\rho \\ &\Leftrightarrow \\ F &= (1-\cos(\theta))vc\rho \end{aligned}$$

$\left([F] = \frac{m}{s}\frac{m^3}{s}\frac{kg}{m^3} = \frac{kgm}{s^2}\right)$